

Πλέγματα συζευγμένων ταλαντωτών και Breathers

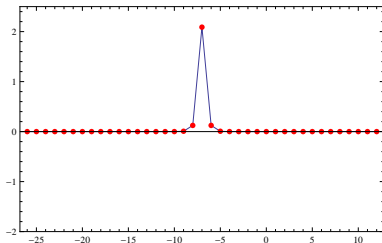
Βασίλης Κουκουλογιάννης
Πανεπιστήμιο Αιγαίου
vkouk@aegean.gr

26ο Θερινό Σχολείο – Συνέδριο
Δυναμικά Συστήματα και Πολυπλοκότητα
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

18 Ιουλίου 2019

Η θεμελιώδης ερώτηση!

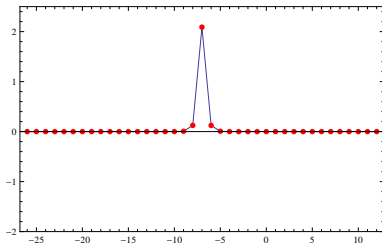
Θεωρούμε μια αλυσίδα συζευγμένων ταλαντωτών. Παρέχουμε ενέργεια σε έναν από αυτούς και αφήνουμε το σύστημα να εξελιχθεί. Τι θα συμβεί;



- Η κοινή πεποίθηση είναι ότι η ενέργεια θα διαδοθεί σε όλη την αλυσίδα.

Η θεμελιώδης ερώτηση!

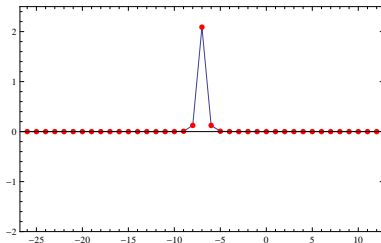
Θεωρούμε μια αλυσίδα συζευγμένων ταλαντωτών. Παρέχουμε ενέργεια σε έναν από αυτούς και αφήνουμε το σύστημα να εξελιχθεί. Τι θα συμβεί;



- Η κοινή πεποίθηση είναι ότι η ενέργεια θα διαδοθεί σε όλη την αλυσίδα.
- Όμως αυτό δεν είναι πάντα αληθές!!!

Η θεμελιώδης ερώτηση!

Θεωρούμε μια αλυσίδα συζευγμένων ταλαντωτών. Παρέχουμε ενέργεια σε έναν από αυτούς και αφήνουμε το σύστημα να εξελιχθεί. Τι θα συμβεί;



- Η κοινή πεποίθηση είναι ότι η ενέργεια θα διαδοθεί σε όλη την αλυσίδα.
- Όμως αυτό δεν είναι πάντα αληθές!!!
- Ποιες είναι οι συνθήκες που προκαλούν εντοπισμό;

Οι εξισώσεις κίνησης του Νεύτωνα

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα μας λέει:

$$m\ddot{x} = F(x) \quad \text{ή} \quad \ddot{x} = F(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Ορίζουμε το δυναμικό ως:

$$F(x) = -\nabla V$$

και παίρνουμε

$$\ddot{x} = -V'(x)$$

Γραμμικό είναι το σύστημα όταν

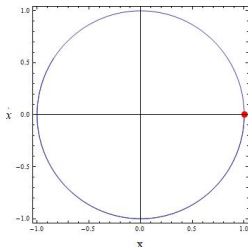
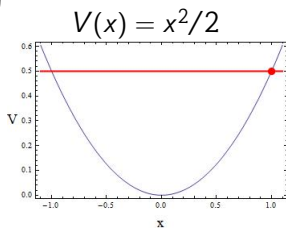
$$F(x) = -kx,$$

ή

$$V(x) = k\frac{x^2}{2}$$

Ο γραμμικός ταλαντωτής

Όταν το $k > 0$, το δυναμικό έχει ελάχιστο στο $x = 0$ με $V'(x) = 0$ και $V''(0) = \omega_0^2$. Πραγματοποιείται κίνηση γύρω από το ελάχιστο του δυναμικού



Η λύση των εξισώσεων κίνησης για την περίπτωση του γραμμικού ταλαντωτή δίνονται από την

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

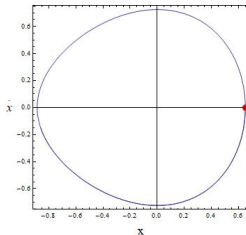
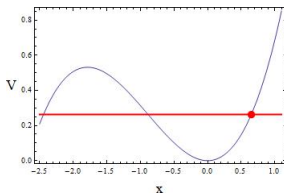
Η συχνότητα της ταλάντωσης δεν εξαρτάται από το πλάτος!!!

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \quad \text{και} \quad \varphi = \sin^{-1} \frac{x_0}{A}$$

Ο μη γραμμικός ταλαντωτής

Στην περίπτωση μη γραμμικού δυναμικού η ταλάντωση ορίζεται πάλι γύρω από κάποιο ελάχιστο του δυναμικού. Η τροχιά στο χώρο των φάσεων παραμορφώνεται αλλά παραμένει κλειστή

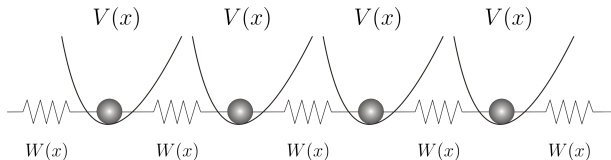
$$V(x) = x^2/2 + \alpha x^3/3 + \beta x^4/4$$



Η λύση των εξισώσεων κίνησης δε μπορεί συνήθως να βρεθεί παρα μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις

Η συχνότητα της ταλάντωσης ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ από το πλάτος!!!

Κατασκευή μη γραμμικής αλυσίδας



Το θεσιακό δυναμικό είναι $V(x_i)$ και το δυναμικό αλληλεπίδρασης είναι $W(x_{i+1} - x_i)$. Η γενική συνάρτηση Hamilton είναι της μορφής

$$H = \sum_i \left(\frac{p_i^2}{2} + V(x_i) \right) + \sum_i \epsilon W(x_{i+1} - x_i)$$

- Άν $V(x) = 0$, \rightarrow αλυσίδα **FPU**
- Άν $W(x) = \frac{x^2}{2}$ και $V(x) \neq \frac{x^2}{2} \rightarrow$ αλυσίδα **Klein-Gordon**
- Άν $W(x) \neq \frac{x^2}{2}$ και $V(x) \neq \frac{x^2}{2} \rightarrow$ **γενικευμένη αλυσίδα FPU**

Αλυσίδα Klein - Gordon

Εξισώσεις κίνησης της αλυσίδας Klein - Gordon

Μία αλυσίδα **όμοιων αναρμονικών** ταλαντωτών με **γραμμική** σύζευξη **κοντινότερου γείτονα** μέσω της σταθεράς σύζευξης ε .



Υπενθυμίζουμε ότι $V'(0) = 0$ και $V''(0) = \omega_0^2$

Εξισώσεις κίνησης της αλυσίδας Klein - Gordon

Μία αλυσίδα όμοιων αναρμονικών ταλαντωτών με γραμμική σύζευξη κοντινότερου γείτονα μέσω της σταθεράς σύζευξης ε .



Υπενθυμίζουμε ότι $V'(0) = 0$ και $V''(0) = \omega_0^2$

Η δύναμη που ασκείται στον i ταλανττή από τον $i + 1$ είναι

$$F(x_i, x_{i+1}) = \varepsilon(x_{i+1} - x_i)$$

$\varepsilon > 0$ (ελκτική δύναμη) ή $\varepsilon < 0$ (απωστική δύναμη)

Εξισώσεις κίνησης της αλυσίδας Klein - Gordon

Μία αλυσίδα **όμοιων αναρμονικών** ταλαντωτών με **γραμμική** σύζευξη **κοντινότερου γείτονα** μέσω της σταθεράς σύζευξης ε .



Υπενθυμίζουμε ότι $V'(0) = 0$ και $V''(0) = \omega_0^2$

Η δύναμη που ασκείται στον i ταλανττή από τον $i + 1$ είναι

$$F(x_i, x_{i+1}) = \varepsilon(x_{i+1} - x_i)$$

$\varepsilon > 0$ (ελκτική δύναμη) ή $\varepsilon < 0$ (απωστική δύναμη)

Οι εξισώσεις κίνησης

$$\ddot{x}_i = -V'(x_i) + \varepsilon(x_{i+1} - x_i) - \varepsilon(x_i - x_{i-1})$$

Εξισώσεις κίνησης της αλυσίδας Klein - Gordon

Μία αλυσίδα **όμοιων αναρμονικών** ταλαντωτών με **γραμμική** σύζευξη **κοντινότερου γείτονα** μέσω της σταθεράς σύζευξης ε .



Υπενθυμίζουμε ότι $V'(0) = 0$ και $V''(0) = \omega_0^2$

Η δύναμη που ασκείται στον i ταλανττή από τον $i + 1$ είναι

$$F(x_i, x_{i+1}) = \varepsilon(x_{i+1} - x_i)$$

$\varepsilon > 0$ (ελκτική δύναμη) ή $\varepsilon < 0$ (απωστική δύναμη)

Οι εξισώσεις κίνησης

$$\ddot{x}_i = -V'(x_i) + \varepsilon(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1})$$

Σχέση Διασποράς

Οι εξισώσεις κίνησης της αλυσίδας είναι οι:

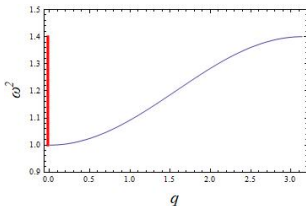
$$\ddot{x}_i = -V'(x_i) + \varepsilon(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1})$$

Θεωρούμε λύσεις μικρού πλάτους της μορφής $x_n(t) = Ae^{i(\omega t - nq)} + c.c.$ τις εισαγάγουμε στις αντίστοιχες γραμμικοποιημένες εξισώσεις κίνησης

$$\ddot{x}_i = -\omega_0^2 x_i + \varepsilon(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}).$$

Παίρνουμε μια σχέση μεταξύ του κυματάριθμου και της συχνότητας

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 4\varepsilon \sin^2\left(\frac{q}{2}\right)$$



Περιοδικές Συνθήκες

Ορίζουμε: $\eta = (x, \dot{x})$. Για να είναι μία κίνηση περιοδική θα πρέπει:

$$M(\eta_0) \equiv \eta(\eta_0, T) - \eta(\eta_0, 0) = 0$$

Στο αντισυνεχές ($\epsilon = 0$) όριο θεωρούμε έναν μόνο ταλαντωτή να κινείται ενώ οι υπόλοιποι βρίσκονται σε ηρεμία ($x(0) = \dot{x}(0) = 0$). Αυτή αποτελεί μία περιοδική και τετριμμένα εντοπισμένη κίνηση. Σύμφωνα με το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης αυτή συνεχίζεται για $\epsilon \neq 0$ και $|\epsilon| \ll 1$ αν ο πίνακας

$$\frac{\partial M}{\partial \eta_0} = \frac{\partial \eta(\eta_0, T)}{\partial \eta_0} - \frac{\partial \eta_0}{\partial \eta_0} = \Delta(T) - I$$

είναι αντιστρέψιμος. Αν το σύστημα είναι πεπερασμένων διαστάσεων αυτό ισοδυναμεί με

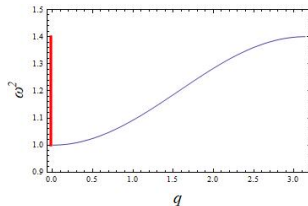
$$\det(\Delta(T) - I) = 0$$

Ομως, ο μονόδρομος πίνακας έχει ΠΑΝΤΑ ένα ζευγος ιδιοτιμών στη μονάδα

Υπαρξη Discrete Breather

- Χρησιμοποιώντας το αντισυνεχές όριο ως αρχική εκτίμηση φτιάχνουμε ένα κατάλληλο σχήμα Newton - Raphson για την επίλυση των περιοδικών συνθηκών $M(\eta_0) = 0$.
- Ένα τρόπος για να απαλλαγούμε τον εκφυλισμό του μονόδρομου είναι να ορίσουμε μια κατάλληλη τομή Poincaré. Με τον τρόπο αυτόν απαλασσόμαστε από 2 εξισώσεις και τις μοναδιαίες ιδιοτιμές.

Για τί τιμές του ε ισχύει η συνέχιση;
Μεχρι την τιμή που ε που μας επιτρέπει να αποφευγουμε το γραμμικό φασμα



Η Χαμιλτονιανή μορφή της Klein - Gordon

Κάθε ταλαντωτής της αλυσίδας περιγράφεται από το ζεύγος των συζυγών μεταβλητών θέσης και ορμής (x_i, p_i) .



Ασύζευκτος ταλαντωτής: $H_0 = \frac{p_i^2}{2} + V(x_i)$ με $V'(0) = 0$ και $V''(0) = \omega_0^2$

Η Χαμιλτονιανή μορφή της Klein - Gordon

Κάθε ταλαντωτής της αλυσίδας περιγράφεται από το ζεύγος των συζυγών μεταβλητών θέσης και ορμής (x_i, p_i) .



Ασύζευκτος ταλαντωτής: $H_0 = \frac{p_i^2}{2} + V(x_i)$ με $V'(0) = 0$ και $V''(0) = \omega_0^2$

Στις μεταβλητές δράσης - γωνίας η κίνηση του ταλαντωτή περιγράφεται ως:

$$J_i = \text{σταθ.}, \quad w_i = \omega_i t + \vartheta_i, \quad \text{με } \omega_i = \frac{\partial H_0}{\partial J_i}.$$

Η Χαμιλτονιανή μορφή της Klein - Gordon

Κάθε ταλαντωτής της αλυσίδας περιγράφεται από το ζεύγος των συζυγών μεταβλητών θέσης και ορμής (x_i, p_i) .



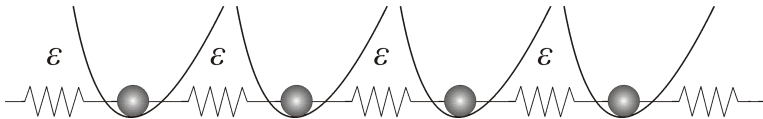
Ασύζευκτος ταλαντωτής: $H_0 = \frac{p_i^2}{2} + V(x_i)$ με $V'(0) = 0$ και $V''(0) = \omega_0^2$

Η αναρμονικότητα ενός ταλαντωτή μπορεί να είναι θετική ή αρνητική

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial J^2} = \frac{\partial \omega}{\partial J} < 0 \text{ (μαλακό δυναμικό) ή } \frac{\partial \omega}{\partial J} > 0 \text{ (σκληρό δυναμικό)}$$

Η Χαμιλτονιανή μορφή της Klein - Gordon

Κάθε ταλαντωτής της αλυσίδας περιγράφεται από το ζεύγος των συζυγών μεταβλητών θέσης και ορμής (x_i, p_i) .



Ασύζευκτος ταλαντωτής: $H_0 = \frac{p_i^2}{2} + V(x_i)$ με $V'(0) = 0$ και $V''(0) = \omega_0^2$

Η αναρμονικότητα ενός ταλαντωτή μπορεί να είναι θετική ή αρνητική

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial J^2} = \frac{\partial \omega}{\partial J} < 0 \text{ (μαλακό δυναμικό)} \quad \text{ή} \quad \frac{\partial \omega}{\partial J} > 0 \text{ (σκληρό δυναμικό)}$$

όπως και η σταθερά σύζευξης

$$\varepsilon > 0 \text{ (ελκτική δύναμη)} \quad \text{ή} \quad \varepsilon < 0 \text{ (απωστική δύναμη)}$$

Η Χαμιλτονιανή μορφή της Klein - Gordon

Κάθε ταλαντωτής της αλυσίδας περιγράφεται από το ζεύγος των συζυγών μεταβλητών θέσης και ορμής (x_i, p_i) .



Ασύζευκτος ταλαντωτής: $H_0 = \frac{p_i^2}{2} + V(x_i)$ με $V'(0) = 0$ και $V''(0) = \omega_0^2$

Η συνάρτηση Hamilton της αλυσίδας Klein-Gordon είναι:

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[\frac{p_i^2}{2} + V(x_i) \right] + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} (x_{i+1} - x_i)^2$$

με εξισώσεις κίνησης

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = p_i, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} = -V'(x_i) + \varepsilon(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1})$$

Οι εξισώσεις μεταβολών

Οι εξισώσεις κίνησης γράφονται ως
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}$$

Έστω $(x_0(t), p_0(t))^T$ μια περιοδική τροχιά, και ας θεωρήσουμε μια διαταραχή αυτής

της τροχιάς $(x, p)^T = (x_0 + \delta x, p_0 + \delta p)^T$ έτσι ώστε να πάρουμε τις 'εξισώσεις μεταβολών'

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta x} \\ \dot{\delta p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p} & \frac{\partial^2 H}{\partial p^2} \end{pmatrix}_{\substack{x_0 \\ p_0}} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta p \end{pmatrix}$$

- Αυτό είναι ένα γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων με συντελεστές περιοδικές συναρτήσεις
- Αν τα $(\delta x(t), \delta p(t))$ παραμένουν φραγμένα, η περιοδική τροχιά $x_0(t), p_0(t)$ είναι γραμμικώς ευσταθής \rightarrow Θεωρία Floquet

Ο Μονόδρομος πίνακας - Θεωρία Floquet

- Θεωρούμε τον $n \times n$ πίνακα $\Delta(t)$ του οποίου οι στήλες είναι n γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις των εξισώσεων μεταβολών με $\Delta(0) = I$. Ο πίνακας αυτός καλείται **κύριος θεμελιώδης πίνακας** λύσεων.
- Ο πίνακας $\Delta(T)$ αποκαλείται ο **μονόδρομος πίνακας** του συστήματος
- Η θεωρία Floquet αναφέρει ότι οι λύσεις των εξισώσεων μεταβολών έχουν τη μορφή

$$\delta x(t) = f_1(t)\lambda_i^{t/T}, \quad \delta p(t) = f_2(t)\lambda_i^{t/T},$$

- λ_i είναι οι ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα (**πολλαπλασιαστές Floquet**)
- $f_1(t), f_2(t)$ είναι T -περιοδικές συναρτήσεις.
- Οι ευσταθείς διαμορφώσεις είναι αυτές με

$$|\lambda| \leq 1$$

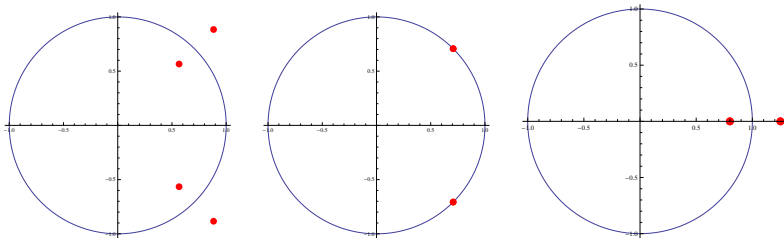
Ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα

Ο μονόδρομος πίνακας είναι συμπλεκτικός. Δηλαδή

$$\Delta(T) \cdot \Omega \cdot \Delta(T)^T = \Omega$$

το οποίο σημαίνει ότι οι ιδιοτιμές του εμφανίζονται σε τετράδες $\lambda, \lambda^{-1}, \lambda^*, \lambda^{*-1}$.

Οι πιθανές διαμορφώσεις είναι:



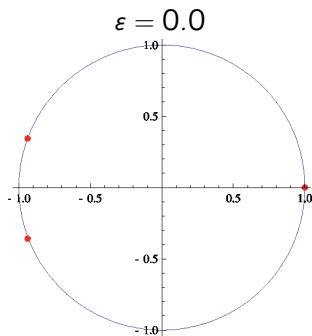
Η μόνη ευσταθής διαμόρφωση είναι αυτή που όλες οι ιδιοτιμές βρίσκονται επί του μοναδιαίου κύκλου.

Ιδιοτιμές Μονόδρομου συναρτήσεως του ε

Ιδιοτιμές Μονόδρομου συναρτήσεϊ του ε

για $\varepsilon = 0$

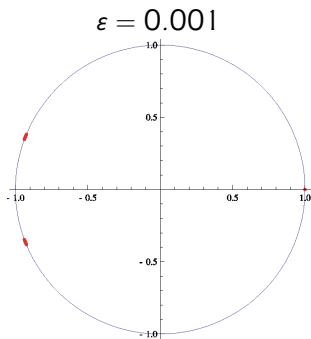
- Υπάρχουν 2 ιδιοτιμές στο $\lambda_{1,2} = +1$ που αντιστοιχούν στην περιοδική τροχιά
- Οι υπόλοιπες ιδιοτιμές βρίσκονται στο $\lambda_i = e^{\pm i\omega_0 T}$ με $i \neq 1, 2$ και $T = 2\pi/\omega_b$



Ιδιοτιμές Μονόδρομου συναρτήσεσι του ε

για $\varepsilon \neq 0$

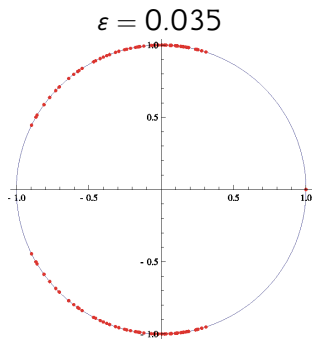
- Οι ιδιοτιμές είναι αναλυτικές συναρτήσεις του ε και του ίδιου είδους κατά Krein. Έτσι δημιουργείται η ζώνη των φωνονίων (γραμμικό φάσμα).
- $\lambda_i = e^{i\omega T}$, $\omega^2 = \omega_0^2 + 4\varepsilon \cos^2\left(\frac{q}{2}\right)$



Ιδιοτιμές Μονόδρομου συναρτήσεως του ε

για $\varepsilon \neq 0$

- Όσο το ε μεγαλώνει η ζώνη των φωνονίων διευρύνεται εώς ότου. . .

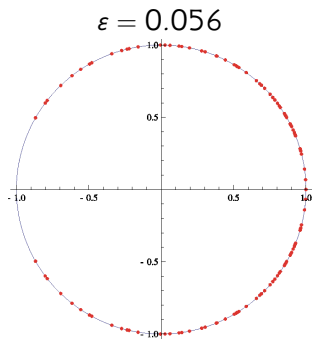


Ιδιοτιμές Μονόδρομου συναρτήσεως του ε

- ... εώς ότου $\varepsilon = \varepsilon_{cr}$

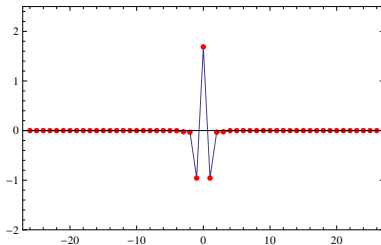
Απαραίτητα συστατικά για ύπαρξη Discrete Breathers:

- Μη Γραμμικότητα
- Διακριτότητα



Τι είναι ένα Multibreather (MB);

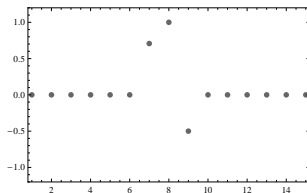
Σε μία μη γραμμική αλυσίδα συζευγμένων ταλαντωτών παρέχουμε ενέργεια σε μερικούς από αυτούς και το αφήνουμε να εξελιχθεί.



- Αν η ενέργεια παραμένει εντοπισμένη σε περισσότερους από έναν 'κεντρικούς' ταλαντωτές η κίνηση ονομάζεται **Multibreather** ή **Discrete Breather n -θέσεων**.
- Ποιές είναι οι συνθήκες για να υπάρχουν Multibreathers;
- Είναι οι λύσεις αυτές ευσταθείς;

Το αντισυνεχές όριο

- Όταν είναι $\varepsilon = 0$ η αλυσίδα αποτελείται από ανεξάρτητους ταλαντωτές.
- Σε αυτό το όριο θεωρούμε $n + 1$ κεντρικούς ταλαντωτές να κινούνται σε περιοδικές τροχιές με κοινή συχνότητα ω και αυθαίρετη φάση. Αυτή η διαμόρφωση ορίζει μια τετριμμένα εντοπισμένη και περιοδική κίνηση για ολόκληρη την αλυσίδα.



- Ποιές από όλες αυτές τις κινήσεις συνεχίζονται για $\varepsilon \neq 0$ έτσι ώστε να παρέχουν χωρικά εντοπισμένες ταλαντώσεις (*Discrete Breathers* ή *Multibreathers*);

Η δρώσα συνάρτηση Hamilton

Στο αντισυνεχές όριο ισχύει

$$x_i(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(J_i) \cos(mw_i) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(J_i) \cos[m(\omega_i t + \vartheta_i)]$$

όπου $w = \omega t + \vartheta$, $J = \text{σταθ.}$ είναι οι μεταβλητές δράσης-γωνίας. Τότε η συνάρτηση Hamilton γίνεται

$$H = H_0(J_i) + \varepsilon H_1(x_j, p_j, w_i, J_i).$$

Θεωρώντας τον κανονικό μετασχηματισμό:

$$z = w_0 \quad A = \sum_{j=0}^n J_j$$

$$\varphi_i = w_i - w_{i-1} \quad I_i = \sum_{j=i}^n J_j$$

Η Χαμιλτονιανή γίνεται $H = H_0(A, I_i) + \varepsilon H_1(x_j, p_j, \varphi_i, I_i, z, A)$.

$$H^{\text{eff}} = \frac{1}{T} \oint H dt \simeq H_0 + \frac{\varepsilon}{T} \oint H_1 dt \Rightarrow H^{\text{eff}} \simeq H_0(I_i, A) + \langle H_1 \rangle(I_i, A, \varphi_i)$$

Οι συνθήκες συνέχισης

Τα κρίσιμα σημεία της H^{eff} αντιστοιχούν σε Multibreathers. Η γραμμική ευστάθεια των λύσεων αυτών καθορίζει και τη γραμμική ευστάθεια των αντίστοιχων Multibreathers (T. Ahn *et al*, 1999). Το γεγονός αυτό οδηγεί στις συνθήκες συνέχισης

$$\frac{\partial \langle H_1 \rangle}{\partial \varphi_i} = 0, \quad i = 0, \dots, n$$

Η κίνηση ενός ασύζευκτου ταλαντωτή μπορεί να περιγραφεί από:

$$x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(J) \cos(m\omega) \Rightarrow \langle H_1 \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} A_m^2 \cos(m\varphi_i)$$

και οι συνθήκες συνέχισης γίνονται

$$\frac{\partial \langle H_1 \rangle}{\partial \varphi_i} = 0 \Rightarrow M(\varphi) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} mA_m^2 \sin(m\varphi_i) = 0$$

Αυτές ικανοποιούνται πάντα αν $\sin(n\varphi_i) = 0 \Rightarrow \varphi_i = 0, \pi$

Μη ύπαρξη λύσεων μετατοπισμένης φάσης

Υπάρχουν λύσεις της $M(\varphi) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} mA_m^2 \sin(m\varphi_i) = 0$

με $\varphi_i \neq 0, \pi$;

Μη ύπαρξη λύσεων μετατοπισμένης φάσης

Υπάρχουν λύσεις της
$$M(\varphi) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} mA_m^2 \sin(m\varphi_i) = 0$$

με $\varphi_i \neq 0, \pi$;

Ή, υπάρχουν *Breathers μετατοπισμένης φάσης* στις κλασικές αλυσίδες KG;

Μη ύπαρξη λύσεων μετατοπισμένης φάσης

Υπάρχουν λύσεις της $M(\varphi) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} mA_m^2 \sin(m\varphi_i) = 0$

με $\varphi_i \neq 0, \pi$;

Ή, υπάρχουν *Breathers μετατοπισμένης φάσης* στις κλασικές αλυσίδες KG;

Θεώρημα (2013)

Δεν μπορούν να υπάρξουν *Breathers μετατοπισμένης φάσης* σε κλασικές αλυσίδες KG.

Μη ύπαρξη λύσεων μετατοπισμένης φάσης

Υπάρχουν λύσεις της
$$M(\varphi) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} mA_m^2 \sin(m\varphi_i) = 0$$

με $\varphi_i \neq 0, \pi$;

Ή, υπάρχουν *Breathers μετατοπισμένης φάσης* στις κλασικές αλυσίδες KG;

Θεώρημα (2013)

Δεν μπορούν να υπάρξουν *Breathers μετατοπισμένης φάσης* σε κλασικές αλυσίδες KG.

Βασιζόμενοι στο γεγονός αυτό η ευστάθεια των υποστηριζόμενων multibreathers μπορεί επίσης να καθοριστεί.

Σκαρίφημα Απόδειξης

Εφόσον $x(w) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(nw),$

Η συνέλιξη του $x(w)$ δίνει

$$N(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(w)x(\varphi - w)dw = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 \cos(n\varphi)$$

ή

$$\frac{d}{d\varphi} N(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} nA_n^2 \sin(n\varphi)$$

επίσης

$$\frac{d}{d\varphi} N(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(w) \frac{d}{dw} [x(\varphi - w)]dw = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} x(w)\dot{x}(\varphi - w)dw$$

τελικά

$$M(\varphi) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} nA_n^2 \sin(n\varphi) = -\frac{1}{\pi\omega} \int_0^{2\pi} x(w)\dot{x}(w - \varphi)dw$$

Σκαρίφημα Απόδειξης

Υπενθυμίζουμε ότι

$$M(\varphi) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} n A_n^2 \sin(n\varphi) = -\frac{1}{\pi\omega} \int_0^{2\pi} x(w) \dot{x}(w - \varphi) dw$$

Αν

$$\mathbf{x}(w) = \{x(w), \dot{x}(w)\}$$

παιρνουμε

$$|\mathbf{x}(w) \times \mathbf{x}(w - \varphi)| = x(w)\dot{x}(w - \varphi) - \dot{x}(w)x(w - \varphi) = \|\mathbf{x}(w)\| \|\mathbf{x}(w - \varphi)\| \sin \varphi$$

και τελικά

$$\int_0^{2\pi} \dot{x}(w) x(w - \varphi) dw = -\frac{\sin \varphi}{2} \int_0^{2\pi} \|\mathbf{x}(w)\| \|\mathbf{x}(w - \varphi)\| dw \quad \square$$

Γραμμική ευστάθεια Multibreathers

Εκτός από τη ζώνη των φωνονίων υπάρχουν n ζευγάρια ιδιοτιμών στη μονάδα για $\varepsilon = 0$ όσα και οι κεντρικοί ταλαντωτές του Multibreather. Αυτές οι ιδιοτιμές μπορούν να κινηθούν κατά μήκος του μοναδιαίου κύκλου (γραμμική ευστάθεια) ή κατά μήκος του πραγματικού άξονα (αστάθεια).

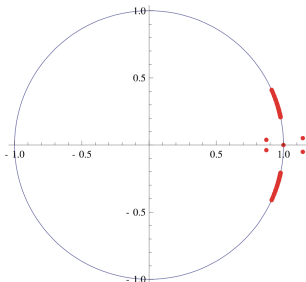
Για παράδειγμα για έναν 3-breather μπορούμε να έχουμε:

Γραμμική ευστάθεια Multibreathers

Εκτός από τη ζώνη των φωνονίων υπάρχουν n ζευγάρια ιδιοτιμών στη μονάδα για $\varepsilon = 0$ όσα και οι κεντρικοί ταλαντωτές του Multibreather. Αυτές οι ιδιοτιμές μπορούν να κινηθούν κατά μήκος του μοναδιαίου κύκλου (γραμμική ευστάθεια) ή κατά μήκος του πραγματικού άξονα (αστάθεια).

Για παράδειγμα για έναν 3-breather μπορούμε να έχουμε:

2 ζεύγη ιδιοτιμών εγκαταλείπουν το μοναδιαίο κύκλο για $\varepsilon \neq 0$

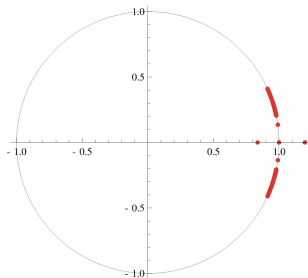


Γραμμική ευστάθεια Multibreathers

Εκτός από τη ζώνη των φωνονίων υπάρχουν n ζευγάρια ιδιοτιμών στη μονάδα για $\varepsilon = 0$ όσα και οι κεντρικοί ταλαντωτές του Multibreather. Αυτές οι ιδιοτιμές μπορούν να κινηθούν κατά μήκος του μοναδιαίου κύκλου (γραμμική ευστάθεια) ή κατά μήκος του πραγματικού άξονα (αστάθεια).

Για παράδειγμα για έναν 3-breather μπορούμε να έχουμε:

1 ζεύγος ιδιοτιμών εγκαταλείπει το μοναδιαίο κύκλο για $\varepsilon \neq 0$

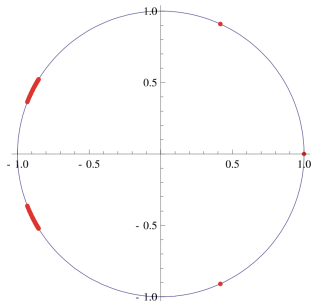


Γραμμική ευστάθεια Multibreathers

Εκτός από τη ζώνη των φωνονίων υπάρχουν n ζευγάρια ιδιοτιμών στη μονάδα για $\varepsilon = 0$ όσα και οι κεντρικοί ταλαντωτές του Multibreather. Αυτές οι ιδιοτιμές μπορούν να κινηθούν κατά μήκος του μοναδιαίου κύκλου (γραμμική ευστάθεια) ή κατά μήκος του πραγματικού άξονα (αστάθεια).

Για παράδειγμα για έναν 3-breather μπορούμε να έχουμε:

και τα δύο ζεύγη κινούνται κατά μήκος του μοναδιαίου κύκλου

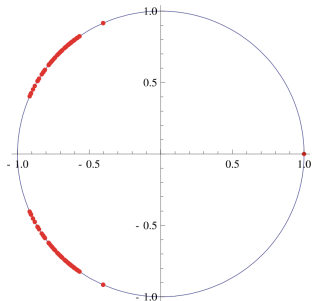


Γραμμική ευστάθεια Multibreathers

Εκτός από τη ζώνη των φωνονίων υπάρχουν n ζευγάρια ιδιοτιμών στη μονάδα για $\varepsilon = 0$ όσα και οι κεντρικοί ταλαντωτές του Multibreather. Αυτές οι ιδιοτιμές μπορούν να κινηθούν κατά μήκος του μοναδιαίου κύκλου (γραμμική ευστάθεια) ή κατά μήκος του πραγματικού άξονα (αστάθεια).

Για παράδειγμα για έναν 3-breather μπορούμε να έχουμε:

και τα δύο ζεύγη κινούνται κατά μήκος του μοναδιαίου κύκλου

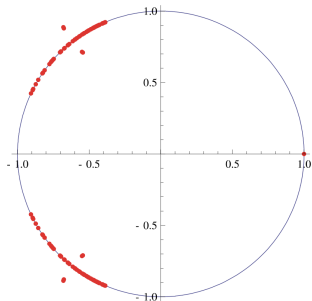


Γραμμική ευστάθεια Multibreathers

Εκτός από τη ζώνη των φωνονίων υπάρχουν n ζευγάρια ιδιοτιμών στη μονάδα για $\varepsilon = 0$ όσα και οι κεντρικοί ταλαντωτές του Multibreather. Αυτές οι ιδιοτιμές μπορούν να κινηθούν κατά μήκος του μοναδιαίου κύκλου (γραμμική ευστάθεια) ή κατά μήκος του πραγματικού αξονα (αστάθεια).

Για παράδειγμα για έναν 3-breather μπορούμε να έχουμε:

εώς όπου συγκρούονται με τη ζώνη των φωνονίων (γραμμικό φάσμα)



Η ευστάθεια των Multibreather περιγράφεται μέσω των χαρακτηριστικών εκθετών σ_i που ορίζονται ως

$$\sigma_i = \frac{1}{T} \ln \lambda_i$$

όπου λ_i είναι οι πολλαπλασιαστές Floquet. Τα σ_i δίνονται ως ιδιοτιμές του πίνακα $E = \Omega D^2 H^{\text{eff}}$,

$$E = \left(\begin{array}{c|c} -\varepsilon \frac{\partial^2 \langle H_1 \rangle}{\partial \varphi_i \partial l_j} & -\varepsilon \frac{\partial^2 \langle H_1 \rangle}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \\ \hline \frac{\partial^2 H_0}{\partial l_i \partial l_j} + \varepsilon \frac{\partial^2 \langle H_1 \rangle}{\partial l_i \partial l_j} & \varepsilon \frac{\partial^2 \langle H_1 \rangle}{\partial \varphi_j \partial l_i} \end{array} \right). \quad (1)$$

Η ευστάθεια των Multibreather περιγράφεται μέσω των χαρακτηριστικών εκθετών σ_i που ορίζονται ως

$$\sigma_i = \frac{1}{T} \ln \lambda_i$$

όπου λ_i είναι οι πολλαπλασιαστές Floquet. Τα σ_i δίνονται ως ιδιοτιμές του πίνακα $E = \Omega D^2 H^{\text{eff}}$,

$$E = \left(\begin{array}{c|c} -\varepsilon \frac{\partial^2 \langle H_1 \rangle}{\partial \varphi_i \partial l_j} & -\varepsilon \frac{\partial^2 \langle H_1 \rangle}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \\ \hline \frac{\partial^2 H_0}{\partial l_i \partial l_j} + \varepsilon \frac{\partial^2 \langle H_1 \rangle}{\partial l_i \partial l_j} & \varepsilon \frac{\partial^2 \langle H_1 \rangle}{\partial \varphi_j \partial l_i} \end{array} \right). \quad (1)$$

Για γραμμική ευστάθεια απαιτούμε **όλοι** οι χαρακτηριστικοί εκθέτες σ_i να είναι **αμιγώς φανταστικοί**.

Ευστάθεια των Multibreathers σε KG αλυσίδες

Οι χαρακτηριστικοί εκθέτες δίνονται σε κύρια τάξη προσέγγισης ως

$$\sigma_i = \pm \sqrt{-\varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial J} \chi_z}$$

όπου χ_z είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{Z} = \frac{\partial^2 \langle H_1 \rangle}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \cdot \mathbf{L}$, με

$$\frac{\partial^2 \langle H_1 \rangle}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} = \begin{pmatrix} f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & f_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f_n \end{pmatrix} \text{ και } \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}, \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 2f_1 & -f_1 & 0 & 0 \\ -f_2 & 2f_2 & -f_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -f_{n-1} & 2f_{n-1} & -f_{n-1} \\ 0 & 0 & -f_n & 2f_n \end{pmatrix}, f_i = \frac{1}{2} \sum_{m \geq 1} m^2 A_m^2 \cos(m\varphi_i)$$

Θεώρημα σχετικά με την ευστάθεια σε KG αλυσίδες

Εφόσον, $f(0) > 0$ και $f(\pi) < 0$ ο αριθμός των $\chi_{zi} > 0$ ή $\chi_{zi} < 0$ αντιστοιχεί στον αριθμό των $\varphi_i = 0$ και $\varphi_i = \pi$.

Επομένως, συμπεραίνουμε τελικά ότι

Θεώρημα σχετικά με την ευστάθεια σε KG αλυσίδες

Εφόσον, $f(0) > 0$ και $f(\pi) < 0$ ο αριθμός των $\chi_{zi} > 0$ ή $\chi_{zi} < 0$ αντιστοιχεί στον αριθμό των $\varphi_i = 0$ και $\varphi_i = \pi$.

Επομένως, συμπεραίνουμε τελικά ότι

- Υπάρχουν μόνο συνήθεις Multibreathers με διαφορά φάσης μεταξύ διαδοχικών ταλαντωτών $\varphi_i = 0$ ή π .

Θεώρημα σχετικά με την ευστάθεια σε KG αλυσίδες

Εφόσον, $f(0) > 0$ και $f(\pi) < 0$ ο αριθμός των $\chi_{zi} > 0$ ή $\chi_{zi} < 0$ αντιστοιχεί στον αριθμό των $\varphi_i = 0$ και $\varphi_i = \pi$.

Επομένως, συμπεραίνουμε τελικά ότι

- Υπάρχουν μόνο συνήθεις Multibreathers με διαφορά φάσης μεταξύ διαδοχικών ταλαντωτών $\varphi_i = 0$ ή π .
- Άν $P = \varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial J} < 0$, η μόνη ευσταθής διαμόρφωση είναι η $\varphi_i = \pi \forall i$. Για κάθε $\varphi_i = 0$ ένας ασταθής εκθέτης προστίθεται.

Θεώρημα σχετικά με την ευστάθεια σε KG αλυσίδες

Εφόσον, $f(0) > 0$ και $f(\pi) < 0$ ο αριθμός των $\chi_{zi} > 0$ ή $\chi_{zi} < 0$ αντιστοιχεί στον αριθμό των $\varphi_i = 0$ και $\varphi_i = \pi$.

Επομένως, συμπεραίνουμε τελικά ότι

- Υπάρχουν μόνο συνήθεις Multibreathers με διαφορά φάσης μεταξύ διαδοχικών ταλαντωτών $\varphi_i = 0$ ή π .
- Άν $P = \varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial J} < 0$, η μόνη ευσταθής διαμόρφωση είναι η $\varphi_i = \pi \forall i$. Για κάθε $\varphi_i = 0$ ένας ασταθής εκθέτης προστίθεται.
- Άν $P = \varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial J} > 0$ η μόνη ευσταθής διαμόρφωση είναι η $\varphi_i = 0 \forall i$. Για κάθε $\varphi_i = \pi$ ένας ασταθής εκθέτης προστίθεται.

Θεώρημα σχετικά με την ευστάθεια σε KG αλυσίδες

Εφόσον, $f(0) > 0$ και $f(\pi) < 0$ ο αριθμός των $\chi_{zi} > 0$ ή $\chi_{zi} < 0$ αντιστοιχεί στον αριθμό των $\varphi_i = 0$ και $\varphi_i = \pi$.

Επομένως, συμπεραίνουμε τελικά ότι

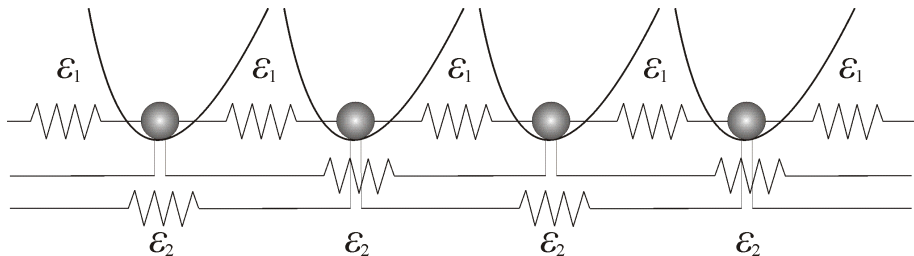
- Υπάρχουν μόνο συνήθεις Multibreathers με διαφορά φάσης μεταξύ διαδοχικών ταλαντωτών $\varphi_i = 0$ ή π .
- Άν $P = \varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial J} < 0$, η μόνη ευσταθής διαμόρφωση είναι η $\varphi_i = \pi \forall i$. Για κάθε $\varphi_i = 0$ ένας ασταθής εκθέτης προστίθεται.
- Άν $P = \varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial J} > 0$ η μόνη ευσταθής διαμόρφωση είναι η $\varphi_i = 0 \forall i$. Για κάθε $\varphi_i = \pi$ ένας ασταθής εκθέτης προστίθεται.

Τα αποτελέσματα βρίσκονται σε συμφωνία με αυτά που αποκτήθηκαν χρησιμοποιώντας τη θεωρία ζωνών του Aubry

Αλυσίδες Klein - Gordon με αλληλεπιδράσεις
εμβέλειας μεγαλύτερης από αυτην του
κοντινότερου γείτονα

Αλυσίδες Klein - Gordon με αλληλεπιδράσεις μακράς εμβέλειας

Μια αλυσίδα Klein - Gordon με αλληλεπιδράσεις μακράς εμβέλειας



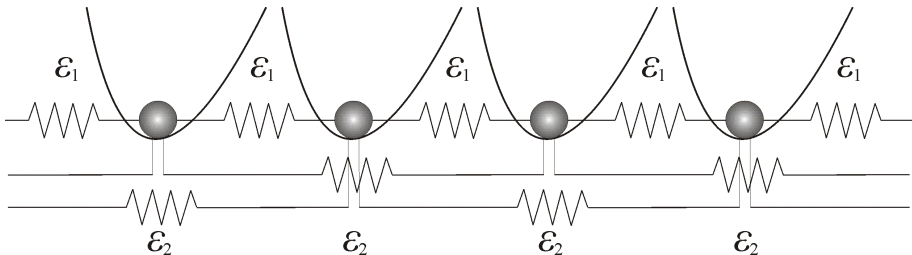
Για $r = 2$

$$H = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} p_i^2 + V(x_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[\varepsilon_1 (x_i - x_{i-1})^2 + \varepsilon_2 (x_i - x_{i-2})^2 \right]$$

$$\ddot{x}_i = -V'(x_i) + \varepsilon_1 (x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}) + \varepsilon_2 (x_{i-2} - 2x_i + x_{i+2})$$

Αλυσίδες Klein - Gordon με αλληλεπιδράσεις μακράς εμβέλειας

Μια αλυσίδα Klein - Gordon με αλληλεπιδράσεις μακράς εμβέλειας



Γενικά

$$H = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[\frac{p_i^2}{2} + V(x_i) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^r \epsilon_j (x_i - x_{i+j})^2$$

$$\ddot{x}_i = -V'(x_i) + \sum_{j=1}^r \epsilon_j (x_{i-j} - 2x_i + x_{i+j})$$

Αλυσίδες Klein - Gordon με αλληλεπιδράσεις μακράς εμβέλειας (ΜΕ)

Έστω $\varepsilon_j = k_j \varepsilon$, με $k_1 = 1$; τότε

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[\frac{p_i^2}{2} + V(x_i) \right] + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^r k_j (x_{i+j} - x_i)^2$$

Αν θεωρήσουμε $n+1$ 'κεντρικούς' ταλαντωτές

$$\langle H_1 \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^{n-j+1} A_m^2 k_j \cos\left(m \sum_{l=0}^{j-1} \varphi_{i+l}\right)$$

Οι συνθήκες συνέχισης είναι

$$\frac{\partial \langle H_1 \rangle}{\partial \varphi_i} = 0 \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^r \sum_{s=z_1}^{z_2} m A_m^2 k_j \sin\left(m \sum_{l=0}^{j-1} \varphi_{s+l}\right) = 0 \quad (2)$$

όπου $z_1 = \max(1, i-j+1)$ και $z_2 = \begin{cases} i & \text{για } i+j-1 \leq n \\ n-j+1 & \text{για } i+j-1 > n \end{cases}$

Ευστάθεια των Multibreathers σε αλυσίδες KG ΜΕ

Οι χαρακτηριστικοί εκθέτες δίνονται από τη $\sigma_i = \pm \sqrt{-\varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial J} \chi_{z_i}}$ όπου χ_{z_i} είναι οι ιδιοτιμές του

$$\mathbf{Z} = \frac{\partial^2 \langle H_1 \rangle}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \cdot \mathbf{L} = \frac{\partial^2 \langle H_1 \rangle}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{και } \frac{\partial^2 \langle H_1 \rangle}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j} = \begin{cases} 0 & \text{αν } d > r \\ \sum_{p=d}^r \sum_{s=z_1}^{z_2} k_{pf} \left(\sum_{l=0}^{p-1} \varphi_{s+l} \right) & \text{αν } d \leq r \end{cases}$$

$$z_1 = \max(1, i - p + d), \quad z_2 = \begin{cases} i & \text{για } i + p - 1 \leq n \\ n - p + 1 & \text{για } i + p - 1 > n \end{cases}.$$

Μερικά Παραδείγματα

Αλυσίδες Klein-Gordon με εμβέλεια $r = 2$
Breathers 3-θέσεων ($n = 2$) με $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$

Breathers 3-θέσεων ($n = 2$) με $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$

Η Χαμιλτονιανή στην περίπτωση αυτή είναι:

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} p_i^2 + V(x_i) + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} [(x_i - x_{i-1})^2 + (x_i - x_{i-2})^2]$$

$$\text{με } \langle H_1 \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} A_m^2 \{ \cos(m\varphi_1) + \cos(m\varphi_2) + \cos[m(\varphi_1 + \varphi_2)] \}$$

οι συνθήκες συνέχισης γίνονται

$$\frac{\partial \langle H_1 \rangle}{\partial \varphi_i} = 0 \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} mA_m^2 \{ \sin(m\varphi_i) + \sin[m(\varphi_1 + \varphi_2)] \} = 0 \quad i = 1, 2$$

οι οποίες παρέχουν 2 διαφορετικά είδη λύσεων, τα συνήθη
Multibreathers

$$\varphi_i = 0, \pi$$

και τα Multibreathers μετατόπισης φάσης

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 2\pi/3, \varphi_1 = \varphi_2 = 4\pi/3.$$

Ευστάθεια Breathers 3-θέσεων ($n = 2$) με $r = 2$ και $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$

Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα παίρνουμε:

για τη διαμόρφωση σε-φάση ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$): $\sigma_{\pm 1, \pm 2} = \pm \sqrt{-3\varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial J} f(0)}$,

για τη διαμόρφωση με αντίθετη φάση ($\varphi_1 = \varphi_2 = \pi$ ή $\varphi_1 = \pi, \varphi_2 = 0$):

$$\sigma_{\pm 1} = \pm \sqrt{-\varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial J} [2f(0) + f(\pi)]}, \quad \sigma_{\pm 2} = \pm \sqrt{-3\varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial J} f(\pi)},$$

και, τελικά, για τη διαμόρφωση μετατόπισης φάσης ($\varphi_1 = \varphi_2 = 2\pi/3$):

$$\sigma_{\pm 1, \pm 2} = \pm \sqrt{-3\varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial J} f(2\pi/3)},$$

Η διαμόρφωση αντίθετης φάσης είναι πάντα ασταθής.

Για $P = \varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial J} < 0$ η ευσταθής διαμόρφωση είναι η

μετατοπισμένης-φάσης, ενώ για $P = \varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial J} > 0$ η ευσταθής διαμόρφωση είναι η σε-φάση.

Αλυσίδα Klein-Gordon με εμβέλεια $r = 2$
Breathers 3-θέσεων ($n = 2$) με $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$

Breathers 3-θέσεων ($n = 2$) με $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$

Έστω $\varepsilon_1 = \varepsilon$ και $\varepsilon_2 = k\varepsilon$. Η Χαμιλτονιανή γίνεται

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} p_i^2 + V(x_i) + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[(x_i - x_{i-1})^2 + k(x_i - x_{i-2})^2 \right]$$

Για ένα Breather 3-θέσεων παίρνουμε

$$\langle H_1 \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} A_m^2 \{ \cos(m\varphi_1) + \cos(m\varphi_2) + k \cos[m(\varphi_1 + \varphi_2)] \}$$

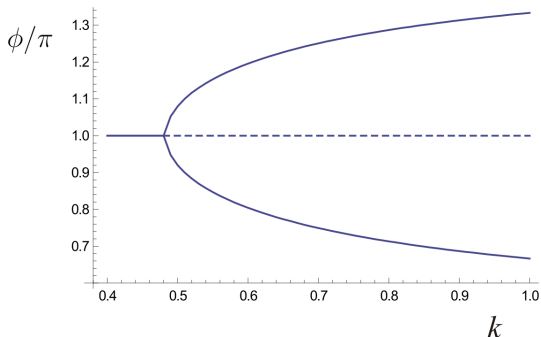
Οι συνθήκες συνέχισης γίνονται

$$\frac{\partial \langle H_1 \rangle}{\partial \varphi_i} = 0 \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} mA_m^2 \{ \sin(m\varphi_i) + k \sin[m(\varphi_1 + \varphi_2)] \} = 0 \quad i = 1, 2$$

που έχουν πολύ ενδιαφέρουσες λύσεις

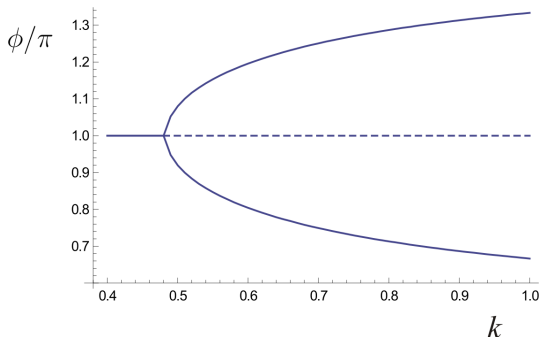
Breathers 3-θέσεων ($n = 2$) με $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$

Αριθμητική μελέτη δείχνει ότι υπάρχουν Breathers μετατόπισης φάσης για $k \neq 1$



Breathers 3-θέσεων ($n = 2$) με $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$

Αριθμητική μελέτη δείχνει ότι υπάρχουν Breathers μετατόπισης φάσης για $k \neq 1$

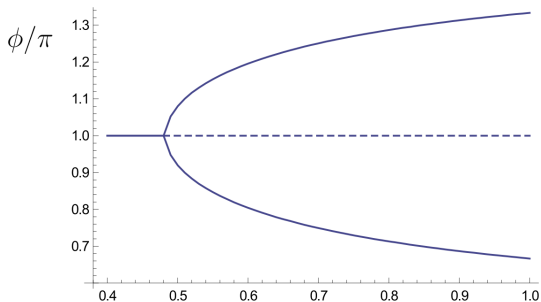


Όσο $k < k_{cr}$, και δεν υπάρχουν Breathers μετατόπισης φάσης,

- Αν $P = \varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial J} < 0$ η μόνη ευσταθής διαμόρφωση είναι η αντίθετης φάσης.
- Αν $P = \varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial J} > 0$ η μόνη ευσταθής διαμόρφωση είναι η σε-φάση.

Breathers 3-θέσεων ($n = 2$) με $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$

Αριθμητική μελέτη δείχνει ότι υπάρχουν Breathers μετατόπισης φάσης για $k \neq 1$



Όταν $k > k_{cr}$, υπάρχουν Breathers μετατοπισμένης φάσης, και

- Αν $P = \varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial J} < 0$ η μόνη ευσταθής διαμόρφωση είναι η μετατοπισμένης φάσης
- Αν $P = \varepsilon \frac{\partial \omega}{\partial J} > 0$ η μόνη ευσταθής διαμόρφωση είναι η σε-φάση.

Αλυσίδα Klein-Gordon με εμβέλεια $r = 2$
Breathers 4-θέσεων ($n = 3$) με $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$

Breathers 4-θέσεων ($n = 3$) με $r = 2$ και $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$

Αν θεωρήσουμε 4 κεντρικούς ταλαντωτές, το $\langle H_1 \rangle$ γίνεται

$$\langle H_1 \rangle = -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} A_n^2 \{ \cos(m\varphi_1) + \cos(m\varphi_2) + \cos(m\varphi_3) + \\ + k \cos[m(\varphi_1 + \varphi_2)] + k \cos[m(\varphi_2 + \varphi_3)] \}$$

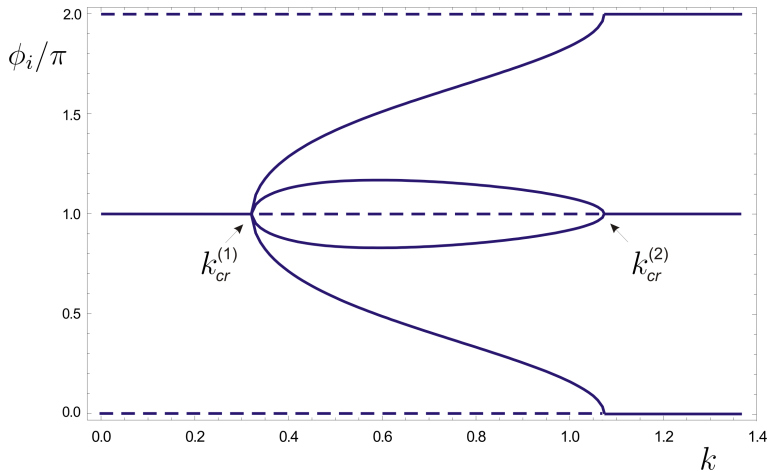
οι αντίστοιχες συνθήκες συνέχισης γίνονται

$$\begin{aligned} M(\varphi_1) + kM(\varphi_1 + \varphi_2) &= 0 \\ M(\varphi_2) + k[M(\varphi_1 + \varphi_2) + M(\varphi_2 + \varphi_3)] &= 0 \\ M(\varphi_3) + kM(\varphi_2 + \varphi_3) &= 0 \end{aligned}$$

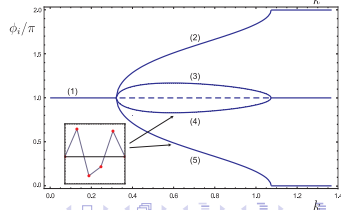
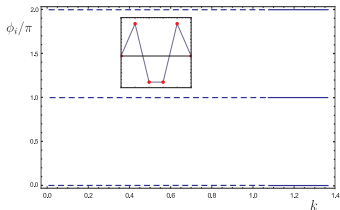
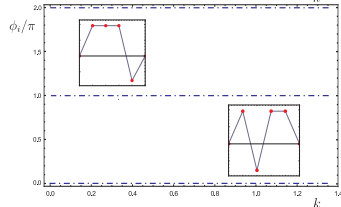
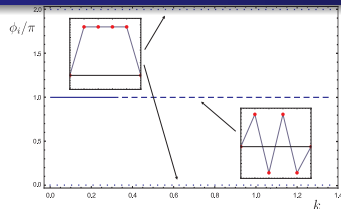
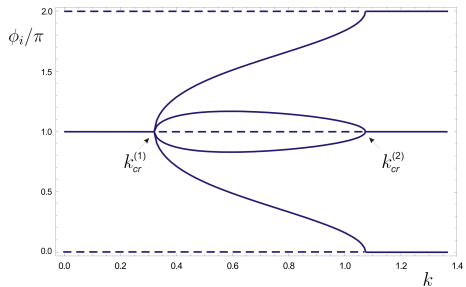
που έχουν τις συνήθεις λύσεις $\varphi_i = 0, \pi \dots$

Breathers 4-θέσεων ($n = 3$) με $r = 2$ και $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$

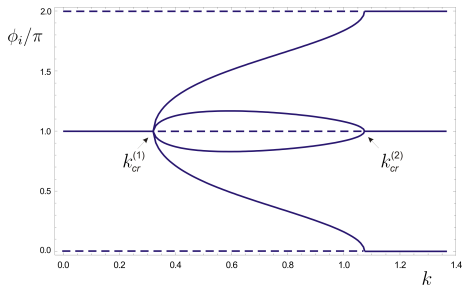
... όπως και μή τετριμμένες



Breathers 4-θέσεων ($n = 3$) με $r = 2$ και $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$



Breathers 4-θέσεων ($n = 3$) με $r = 2$ και $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$



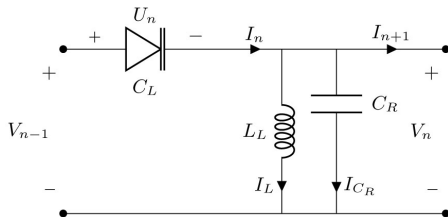
P	k	Σε φάση $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$	Αντίθετη φάση $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \pi$	Μετατοπισμένη φάση $\varphi_1 = \varphi_3, \varphi_2 \neq 0, \pi$	Μικτή $\varphi_1 = \varphi_3 = \pi, \varphi_2 = 0$
$P < 0$	$k < k_{cr}^{(1)}$	ασταθής	σταβλε	—	ασταθής
$P < 0$	$k_{cr}^{(1)} < k < k_{cr}^{(2)}$	ασταθής	ασταθής	ευσταθής	ασταθής
$P < 0$	$k > k_{cr}^{(2)}$	ασταθής	ασταθής	—	ευσταθής
$P > 0$	$k < k_{cr}^{(1)}$	ευσταθής	ασταθής	—	ασταθής
$P > 0$	$k_{cr}^{(1)} < k < k_{cr}^{(2)}$	ευσταθής	ασταθής	ασταθής	ασταθής
$P > 0$	$k > k_{cr}^{(2)}$	ευσταθής	ασταθής	—	ασταθής

Άλλες μορφές αλυσίδων

Μία αλυσίδα μεταύλικών

Εξισώσεις κίνησης

Το κυκλωματικό ισοδύναμο μιας αλυσίδας μεταλλικών είναι το:



Με εξισώσεις κίνησης:

$$L_L C_0 \frac{d^2}{dt^2} [V_{n-1} - 2V_n + V_{n+1}] - L_L C_R \frac{d^2 V_n}{dt^2} - V_n + \alpha L_L \frac{d^2}{dt^2} [(V_{n-1} - V_n)^3 - (V_n - V_{n+1})^3] = 0$$

και μετά από κανονικοποίηση:

$$\frac{d^2}{dt^2} (V_{n-1} - 2V_n + V_{n+1}) - g \frac{d^2 V_n}{dt^2} - V_n + \frac{d^2}{dt^2} [(V_{n-1} - V_n)^3 - (V_n - V_{n+1})^3] = 0$$

Δεν υπάρχει καταλληλο αντισυνεχές όριο για εύρεση Breathers!!!

Η ημισυνεχής προσέγγιση

Θεωρούμε το ανάπτυγμα για την ταση

$$V_n = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \epsilon^\ell V^{(\ell)}(X, T) e^{i\ell(\omega t - kn)} + \text{c.c.}$$

και τις κλιμακες για το χώρο και το χρόνο

$$X = \epsilon(n - v_g t), \quad T = \epsilon^2 t$$

και παίρνουμε για τις διάφορες τάξεις

$$O(\epsilon) : \frac{1}{\omega^2} = 2 + g - 2 \cos k;$$

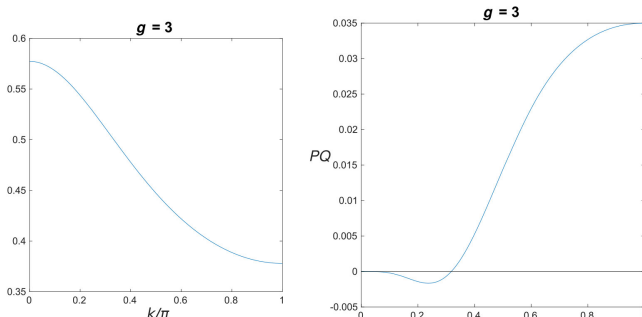
$$O(\epsilon^2) : v_g = -\omega^3 \sin k; \quad V^{(2)} = 0;$$

$$O(\epsilon^3) : i\partial_T V^{(1)} + P\partial_X^2 V^{(1)} + Q|V^{(1)}|^2 V^{(1)} = 0,$$

$$P = \frac{\omega^3}{2} (\cos k - 3\omega^2 \sin^2 k), \quad Q = -24\omega^3 \sin^4(k/2);$$

$$V^{(3)} = \frac{144\omega^2 (1 + 2 \cos k) \sin^4(k/2) V^{(1)^3}{1 + g - 2 \cos(3k)}.$$

Η σχέση διασποράς σε αυτήν την περίπτωση είναι



Η εξίσωση Schrödinger έχει σολιτονική λύση

$$V^{(1)} = \sqrt{\frac{2P}{Q}} u_0 \operatorname{sech}(u_0(X - 2c|P|T)) \exp[i(cX + (u_0^2 - c^2)|P|T)]$$

Παίρνουμε μια αρχική εκτίμηση της λύσης Breather της μορφής

